問

次の式を　-∞　から∞の範囲でフーリエ変換せよ。

$$f(x) = \left(\frac{c}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp(-cx^2/2)$$

ただし、$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{c\left(x+\frac{ik}{c}\right)^2}{2}\right) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{c}}$

をつかう。

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-ikx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4\pi}{c}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{k^2}{2c}\right)$$

問 2

f(x)は　$1/\sqrt{c}$程度の広がりをもつ。逆に　$\hat{f}(k)$は　$\sqrt{c}$程度の広がりを持つ。

すなわち、$f(x)$がシャープであれば、$\hat{f}(k)$はブロードであることを示す。

問 3

微分方程式を解いてみよう

$$\frac{dx}{dt} = k\,x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k\,x;\ k > 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k\,x\,;\ k < 0$$

問 4

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$　このときに A　$\vec{x}$ ＝E $\vec{x}$ をみたす　$\vec{x}$ と E を求めよ。このときにも止まる 2 つのベクトルを固有ベクトル，E を固有値という。

このときに二つのベクトルで作られる行列 U を使って，$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$

この変換を対角化という。これは線型変換（行例などで表されるもの）特有の性質であり，線型微分方程式もこれにより表すことができる。

問 5　ポテンシャルのない自由空間の波動関数で<x>および<x^2>を求めよ。それはどうい

う意味か考えよ。また，同じ量を箱に閉じ込められた波動関数で考えてみよう。ただし，基底状態と励起状態両方を計算してみよう。